

9. حل المسألة الحديثة:

عند حل المسألة الحديثة نظرية كرامر يمكن استخدامها للطريقة التالية:
إذا كانت معطيات لدينا المعادلة التفاضلية (1) العامة مع استمرطين الحدين (2) فإن حل
المسألة الحديثة يمكن أن يكون:

$$[8] \quad y = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x)$$

حيث α و β الثابتان و $y_0(x)$ و $u(x)$ و $v(x)$ مع مستخرجة من مسائل كوشي الشروط الابتدائية مع الترتيب:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad y(1) = f(1) \quad \text{و} \quad y'(1) = 0 \\ \text{II} \quad y(1) = 0 \quad \text{و} \quad y'(1) = 0 \quad \text{و} \quad y(2) = 1 \\ \text{III} \quad y(1) = 0 \quad \text{و} \quad y'(1) = 1 \quad \text{و} \quad y(2) = 0 \end{array} \right\} \quad [9] \quad \begin{array}{l} \text{شروط نقطة واحدة} \\ \text{نقطة واحدة} \end{array}$$

تشكل مسائل كوشي مع نقطة واحدة من المعادلة المعطاة $L(y) = f(x)$.
لم نضع شروط الحدية [2] المعطاة في ثلاثة الخلل [8] الناتجة فنحصل على معادلتين ثالثتين
من أجل تحديد الثوابت α و β .

$$\begin{aligned} & \text{مثال: أوجد حل المسألة الحديثة التالية:} \quad \text{①} \quad xy'' - y' = \frac{3}{x^2} \\ & \text{مع الشروط الحدية:} \quad \text{②} \quad [y(1) = y'(1), \quad 3y(2) - 2y'(2) = 3] \end{aligned}$$

$$\text{حيث نقطة واحدة} \quad a=1 \quad b=2$$

نلاحظ: يمكن إثبات من حل لهذه المسألة بالشكل:

$$y = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x) \quad (*)$$

حيث $y_0(x)$ و $u(x)$ و $v(x)$ مع حلول مسائل كوشي الشروط الابتدائية مع الترتيب:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad xy'' - y' = \frac{3}{x^2} \quad \text{و} \quad y(1) = y'(1) = 0 \\ \text{II} \quad xy'' - y' = 0 \quad \text{و} \quad y(1) = 1 \quad \text{و} \quad y'(1) = 0 \\ \text{III} \quad xy'' - y' = 0 \quad \text{و} \quad y(1) = 0 \quad \text{و} \quad y'(1) = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{مسائل كوشي} \\ \text{الشروط مع} \\ \text{نقطة واحدة} \end{array}$$

حل كل مسألة من هذه المسائل الشروط نجد الحلول هي:

$$\text{I} \Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} \quad (\text{حل المسألة الأولى})$$

$$\text{II} \Rightarrow u(x) = 1 \quad (\text{حل المسألة الثانية})$$

$$\text{III} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad (\text{حل المسألة الثالثة})$$

نقوم الآن بوضع الحل المفروض (*) فنتيجة:

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1)$$

وهو الحل العام للمعادلة

نصفين الثانيين α و β بحيث يمتد هذا الحل اسطرًا الحدي (2) في المسألة المعطاة.

نصوص (المعادلة) الحل هذا هو اسطر الحدي (2) للمسألة المعطاة فنحصل على معادلتين

$$6\alpha + \beta = 7 \quad \alpha = \beta$$

لنصفين α و β هذا الشكل

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 1 \quad \text{بالحل المتكامل}$$

ثم نصوص فبالحل المطلوب

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

$$= x^2 + \frac{1}{x} - 1$$

وهو الحل المطلوب

وذلك مسائل كوشي فرد ثانية

$$xy'' - y' = \frac{3}{x^2} \quad \text{مسألة (1)} \quad \text{حل مسألة كوشي الأولى}$$

$$y(1) = y'(1) = 0 \quad \text{مسألة (2)} \quad \text{شروط الحدي}$$

لإيجاد الحل العاقل لمسألة كوشي المعطاة هذه أولاً نكتب المعادلة (1) بالشكل

$$y'' - \frac{y'}{x} = \frac{3}{x^3} \quad \text{(3)}$$

نسمي $z = y'$

لحلها نأخذ المتجانسة فيها

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0 \Rightarrow$$

كلها نأخذ $z = y'$ (نختار رتبة المعادلة) وتكون المعادلة بالشكل

$$z' - \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \quad \text{بفصل المتغيرات والمعادلة}$$

$$z' = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

(فصل المتغيرات)

بكاملة الطرفين

$$\ln z = \ln cx$$

$$z = cx \Rightarrow y' = cx \quad \text{نأخذ المتكامل} \quad dy = cx dx$$

بكاملة

$$y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$$

وهو الحل العام للمتجانسة

ونلاحظ أن $y = \frac{1}{x}$ حل خاص لغير المتجانسة من (3) جرب بدونه نفسك
والحل العام المطلوب:

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 + \frac{1}{x} \quad (*)$$

ولحساب C_1 و C_2 من خلال المتكافئة للحل الناتج $(*)$ مع الشرط الحدية (2) كوشي
يكون لحساب C_1 و C_2 كما يلي:

$$(*) \Rightarrow y(1) = C_1 \times \frac{1}{2} + C_2 + 1 = 0$$

$$C_1 = -2 - 2C_2 \quad (4)$$

ولحساب C_2 نشتق $(*)$ مرة بالنسبة لـ x فنجد:

$$(*) \Rightarrow y' = C_1 x + 0 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{المعادلة نجد}$$

$$y'(1) = C_1 - 1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$$

من (4) السابقة نجد:

$$2C_2 = -2 - C_1 \Rightarrow C_2 = -1 - \frac{C_1}{2} \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2}$$

نحصل قيمة C_1 و C_2 السابقين في $(*)$ فنكون:

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$$

وهو المطلوب حيث $y = y_0(x)$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x}$$

أو

مسألة II لدينا مسألة كوشي II (نضع u بدل y)

$$xu'' - u' = 0 \quad (I)$$

$$u(1) = 1 \quad u'(1) = 0 \quad (2)$$

والشرط

بإيجاد الحد التوافقي

أن حل المتجانسة II هو الشكل (مدرسة تباريق)

$$u(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (3)$$

الحد العام للمعادلة II

ولحساب C_1 و C_2 من الشروط المعطاة 2 كما يلي:

$$(3) \Rightarrow u(1) = C_1 \times \frac{1}{2} + C_2 = 1 \Rightarrow$$

$$C_1 = 2(1 - C_2) \quad (4)$$

وحساب C_2 نشق [3] فرد بالسوية لـ α فنجد:

$$[3] \Rightarrow u' = C_1 x \Rightarrow \text{بالحدودية}$$

$$u'(1) = C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\boxed{C_2 = 1}$$

وبالتالي من [4] نجد أن

والحل الموافق

$$[3] \Rightarrow \boxed{u(x) = 1}$$

وهو المطلوب

مسألة [III] لدينا مسألة كوشي [IV] (نضع α بدل β)

$$[V] \quad u'' - u' = 0 \quad - \quad [1]$$

$$[2] \quad - \quad [1] \quad u(1) = 1 \quad u(1) = 0$$

إن حل المعادلة [1] هو من الشكل $u(x) = C_1 e^x + C_2$ كما وجدناه في سابق

$$[3] \quad u(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

وحساب C_1 و C_2 من خلال الشرط المظن [2] في المسألة (كوشي)

$$[3] \Rightarrow u(1) = C_1 \times \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -2C_2} \quad - \quad [4]$$

وحساب C_2 نشق المعادلة [1] بحدودية u يكون:

$$[5] \quad u'(x) = C_1(x) \xrightarrow{\text{بالحدودية}} u'(1) = C_1 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

ومن [4] نحسب C_2 كما يلي:

$$[4] \Rightarrow 1 = -2C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{1}{2}}$$

والحل المطلوب لمسألة كوشي [3] يكون بالشكل:

$$[3] \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{أو} \quad \boxed{u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)}$$

وهو المطلوب

والآن بالعودة للتقويض في معادلة الكل (*) :

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1) \quad (***)$$

الكل العام للمعادلة التفاضلية.

ولتجنب α و β الافتياريين هنا يجب التحقق هذا الحد الشرط الحدي للسؤال

المعطاة (2) حيث، $[y(1) = y(2)]$ $3y(2) - 2y'(2) = 3$

نقوم هذا الحد الشرط الحدي (2) للسؤال (المطلوب) فنحصل على معادلتين لتعيين α و β هما من الشكل:

$$\frac{1}{2}(1-3) + 1 + \alpha + \frac{\beta}{2}(1-1) = 1 - 1 + \beta$$

$$y' = x - \frac{1}{x} + \beta x \quad \text{حيث}$$

ومنه نجد أن (بعد اختصار)

$$\boxed{\alpha = \beta} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{هذا الشرط الحدي} \quad \text{II} \Rightarrow 3\left[\frac{1}{2}(4-3) + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{\beta}{2}(4-1)\right] - 2\left[2 - \frac{1}{x} + 2\beta\right] = 3$$

$$3\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{3}{2}\beta\right] - 4 + \frac{1}{x} - 4\beta = 3$$

$$\Rightarrow 3 + 3\alpha + \frac{9}{2}\beta - \frac{7}{2} - 4\beta = 3$$

نضرب ب (2) للطريقتين والتبسيط يكون:

$$\boxed{6\alpha + \beta = 7} \quad \text{--- (2)}$$

وبالحل المشترك لـ (1) و (2) نجد أن:

$$\boxed{\alpha = \beta = 1}$$

وبالتعريف من قيم α و β في معادلة لكل x فيكون:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \\ &= x^2 + \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

هذا السؤال الحدي المطلوب

وهو المطلوب

مسألة 4، استخرج دالة ثرين لمسألة القيمة المتطابقة ثم أكتب صيغة الحل للمسألة بدلالة ثرين.

$$y'' = f(x) \quad (1)$$

$$y|_{x=1} = y|_{x=-1} = 0 \quad (2) \quad -1 \leq x \leq 1$$

المعادلة
ثنيتين وثلاثين

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1) هو من الشكل

$$y'' = 0$$

$$y = c_1 + c_2 x \quad (3)$$

من أجل الحلين الخاصين، نلاحظ أن الحل الخاص الأول

$$y_1(x) = 1 + x \quad (3)$$

$$y_1(-1) = 0$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$y_2(x) = 1 - x$$

والحل الخاص الثاني

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = -1$$

$$y_1(1) = 0$$

وبحسب الشرط الثاني

واعتدنا نلاحظ أن أحد الحلين الخاصين لا يحقق بآمن واحد الشرطين الآخرين

بأن يكون الحل من دالة ثرين من الشكل

$$G(x, s) = \begin{cases} \phi(s)(1+x) & -1 \leq x \leq s \\ \psi(s)(1-x) & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حيث $\phi(s)$ و $\psi(s)$ يتحددان من المعادلتين التفاضليتين:

$$\phi(s)(1-s) = \psi(s)(1+s)$$

$$\phi(s) - \psi(s) = 1$$

وبالحل المشترك لهاتين المعادلتين نحصل على

$$\phi(s) = -\frac{1-s}{2}$$

$$\psi(s) = -\frac{1+s}{2}$$

تأكد من ذلك

وبهذا الشكل نكتب دالة غرين:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-s)(1+x) & \text{و } -1 \leq x \leq s \\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x) & \text{و } s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ويمكن ان نغير مشاكل المسألة المحدية المعطاة بواسطة دالة غرين بالشكل:

$$y(x) = \int_{-1}^{+1} G(x,s) f(s) ds$$

$$= -\frac{1+x}{2} \int_{-1}^x (1-s) f(s) ds - \frac{1-x}{2} \int_x^1 (1+s) f(s) ds$$



انتهت المحاضرة

وفلعلنا

